الفصل الأول - « المحاضرة الأولى »

⊛ كثيرات الحدود « POLYNOMIALS »

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ___ + a_1 x + a_0$$

حيث (n) «درجة كثيرات الحدود»، $a_n , a_2 , a_1 , a_0 \in IR$ وتسمى «أمثال»

Ex) $f(x) = 3 + 5x + 7x^3 - x^4$

أمثال كثيرات الحدود : $P_0 = 3$, $P_1 = 5$, $P_2 = 7$, $P_3 = 0$, $P_4 = -1$

Ex) $g(x) = 2x^3 + 3x$

$P_0 = 0$, $P_1 = 3$, $P_2 = 0$, $P_3 = 2$

⊛ حلول أو جذور كثيرات الحدود « P(X) = 0 » «Roots or solution»

Ex) $h(x) = 3x^2 + 4x + 5$, $k(x) = 7x^2 - 3x$

$\rightarrow h(x) + k(x) = 10x^2 + x + 5$ $\rightarrow h - k = -4x^2 + 7x + 5$

$\rightarrow h(x) . k(x) = (3x^2 + 4x + 5)(7x^2 - 3x) = 21x^4 + 19x^3 + 23x^2 - 15x$

⊛ الأنظمة الخطية «System of linear Equations»

- نعلم أنه يمكننا أن نكتب النظام الخطي بثلاث طرق متكافئة :

1) جملة معادلات خطية :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ___ + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ___ + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + ___ + a_{3n} x_n = b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ___ + a_{mn} x_n = b_m$$

Scanned by CamScanner

2] كمعادلة مصفوفية $\quad Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

3] كمعادلة شعاعية : $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- لحل النظام الخطي يجب إيجاد نظام خطي آخر أبسط حلاً وللوصول للأبسط حلاً نقوم ببعض العمليات الحسابية المسموح بها مثلاً (طريقة غاوس)

Existence and uniquenos

* نظرية الوجود والوحدانية

1) يكون النظام الخطي قابل للحل $\Longleftrightarrow$ أمكن كتابة المصفوفة الموسعة لهذا النظام على شكل اصطفاف بحيث لا يملك هذا الشكل أي سطر له الصيغة التالية $[0 \quad 0 \quad 0 \; \cdots \; 0 \; b] \; ; \; b \neq 0$

2) يكون النظام الخطي قابل للحل عندئذ :

a- إما أن يملك حل وحيد (لا يوجد متغيرات اختيارية)

b- أو يوجد عدد غير منته من الحلول (يوجد على الأقل متغير اختياري)

* شكل الاصطفاف المدرجي : ويكون لها صفات هذا الشكل :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

عمود محوري

1- كل الأسطر الغير صفرية تقع فوق الأسطر الصفرية.

2- كل عنصر ارتكاز يقع إلى اليمين من عنصر الارتكاز السابق الواقع في السطر الأعلى

3- كل العناصر الواقعة تحت المحور الرئيسي مساوية للصفر.

Scanned by CamScanner

4- عنصر الارتكاز في كل سطر صفري = 1

5- كل عنصر ارتكاز يساوي الواحد هو العنصر اللاصفري الوحيد في عموده المحوري.

⊛ بعض التطبيقات المرتبطة بالنظم الخطية

← التركيب الخطي « linear combination »

ليكن لدينا مجموعة من الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^*$ ولتكن $c_1, c_2, \ldots, c_p$ قيم سلمية (ثابتة) عندئذ نسمي الشعاع y والمعطى بالعلاقة $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$ تركيباً خطياً للأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ بدلالة القيم المعطاة $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Ex $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

بين فيما إذا كان b هو عبارة عن تركيب خطي للأشعة a_1, a_2, a_3 ؟

الحل حسب التعريف لدينا $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$ نبحث عن الثوابت التي تحقق العلاقة السابقة فنكتب:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1 \quad , \quad 2x_2 + 6x_3 = 8 \quad , \quad 3x_1 + 14x_2 + 10x_3 = -5$$

نحل هذه المعادلات الثلاث بطريقة غاوس:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1(-3)+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(-1)+R_3 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = +1}$

$2x_2 + 6x_3 = 8 \Rightarrow \boxed{x_2 = -2}$, $-5x_3 = -10 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

إذاً b هو تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3 لأنه:

$$\boxed{a_1 - 2a_2 + 2a_3 = b}$$

ملاحظة: إن للمعادلة الشعاعية $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$ نفس حلول النظام الخطي الذي مصفوفته الموسعة $[a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n \ b]$ وعلى العموم إن b يمكن أن يكون كتركيب خطي لـ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ إذا وفقط إذا وجد حل للنظام الخطي المعطى بدلالة المصفوفة الموسعة.

Scanned by CamScanner